ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG TRẦN ĐẠI NGHĨA
LỚP 9 – LẦN 1 (T1/2015)

Bài 1: (2 điểm) Cho $x^2-3x+1=0$

Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{\left(x^4+x^3-10x^2+x+2015\right)\left(x^4+x^2+1\right)+x^4+3x^2+1}{x^4+x^2+1}$

Bài 2: (2 điểm) Tìm m để phương trình: $\dfrac{mx^2-2\left(m+1\right)x+m-2}{\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x+\sqrt{x^4+x^2+1}=\sqrt{x-x^3}$

b) $\begin{cases}4x^2+2xy+y^2=4y-1\\ 2x=y\left(\dfrac{1}{4x^2+1}-1\right)+2\end{cases}$

Bài 3: (4 điểm)

a) Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$4abc\left[\frac{1}{\left(a+b\right)^2c}+\frac{1}{\left(b+c\right)^2a}+\frac{1}{\left(c+a\right)^2b}\right]+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}\ge 9$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của: $A=\dfrac{433}{17}\sqrt{x-x^2}+143\sqrt{x+x^2}$ với $0<x<1$

Bài 5: (4 điểm) Cho ΔABC nhọn (AB < AC), có H, I, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp. Giả sử bốn điểm B, C, I, O cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng: $IH=IO$

Bài 6: (4 điểm) Cho ΔABC có phân giác trong AD. Ở miền trong $\widehat{BAD}$ và $\widehat{CAD}$ lần lượt vẽ hai tia AM, AN sao cho $\widehat{MAD}=\widehat{NAD}$ (M thuộc đoạn BD, N thuộc đoạn CD). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M lên AB, AC; P, Q lần lượt là hình chiếu của N lên AB, AC.

a) Chứng minh rằng: 4 điểm E, F, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BM.BN}{CM.CN}$

★ HẾT ★

HƯỚNG DẪN ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG TRẦN ĐẠI NGHĨA
LỚP 9 – LẦN 1 (2014-2015)

Bài 1: (2 điểm) Cho $x^2-3x+1=0$

Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{\left(x^4+x^3-10x^2+x+2015\right)\left(x^4+x^2+1\right)+x^4+3x^2+1}{x^4+x^2+1}$

Ta có: $x^2-3x+1=0\Rightarrow x^2=3x-1$; $x^3=x.x^2=x(3x-1)=3x^2-x=3(3x-1)-x=8x-3$

$x^4=x.x^3=x(8x-3)=8x^2-3x=8(3x-1)-3x=21x-8$

Vậy $A=\dfrac{(21x-8+8x-3-30x+10+x+2015)(21x-8+3x-1+1)+21x-8+9x-3+1}{21x-8+3x-1+1}$

$=\dfrac{2014(24x-8)+30x-10}{24x-8}=\dfrac{16112(3x-1)+10(3x-1)}{8(3x-1)}=\dfrac{16122(3x-1)}{8(3x-1)}=\dfrac{8061}{4}$

Bài 2: (2 điểm) Tìm m để phương trình: $\dfrac{mx^2-2(m+1)x+m-2}{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

Điều kiện: $x>\dfrac{1}{2}$

Do vậy pt đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ $\Leftrightarrow mx^2-2(m+1)x+m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ lớn hơn $\dfrac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=m\neq 0\\ \Delta'=(m+1)^2-m(m-2)>0\\ x_1>\dfrac{1}{2}\\ x_2>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ 4m+1>0\\ \left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right)>0\\ \left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ 4m>-1\\ x_1+x_2-1>0\\ x_1x_2-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)+\dfrac{1}{4}>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{2(m+1)}{m}-1>0\\ \dfrac{m-2}{m}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{2(m+1)}{m}+\dfrac{1}{4}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{m+2}{m}>0\\ \dfrac{m-12}{m}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0, m>-\dfrac{1}{4}, m>-2, m>12\\ m<0, m>-\dfrac{1}{4}, m<-2, m<12(\text{vô lý})\end{array}\right.\Leftrightarrow m>12$$

Vậy với m > 12 thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 .

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x+\sqrt{x^4+x^2+1}=\sqrt{x-x^3}$

Điều kiện: $x\le -1; 0\le x\le 1$

Ta có: $x+\sqrt{x^4+x^2+1}=\sqrt{x-x^3}\Rightarrow x=\sqrt{x-x^3}-\sqrt{x^4+x^2+1}$

$$\Rightarrow x^2=\left(\sqrt{x-x^3}-\sqrt{x^4+x^2+1}\right)^2 \Rightarrow x^2=x-x^3+x^4+x^2+1-2\sqrt{\left(x-x^3\right)\left(x^4+x^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow x^4-x^3+x+1=2\sqrt{x\left(1-x^2\right)\left[\left(x^4+2x^2+1\right)-x^2\right]}$$

$$\Rightarrow x^4-x^3+x+1=2\sqrt{x\left(x+1\right)\left(1-x\right)\left[\left(x^2+1\right)-x^2\right]}$$

$$\Rightarrow x^4-x^3+x+1=2\sqrt{x\left(1+x\right)\left(1-x\right)\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)}$$

$$\Leftrightarrow x^4-x^3+x+1=2\sqrt{x\left(1+x^3\right)\left(1-x^3\right)}\Leftrightarrow\left(x^4+x\right)+\left(1-x^3\right)=2\sqrt{\left(x^4+x\right)\left(1-x^3\right)}$$

$$\Rightarrow\left[\left(x^4+x\right)+\left(1-x^3\right)\right]^2=4\left(x^4+x\right)\left(1-x^3\right)\Leftrightarrow\left[\left(x^4+x\right)-\left(1-x^3\right)\right]^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^4+x-1+x^3\right)^2=0\Leftrightarrow x^4+x-1+x^3=0$$

$$\Leftrightarrow x^4+x^2+x^3+x-x^2-1=0\Leftrightarrow x^2\left(x^2+1\right)+x\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x^2+x-1\right)=0\Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt5}{2};x=\frac{-1-\sqrt5}{2}$$

Vậy $S=\left\{\frac{-1+\sqrt5}{2};\frac{-1-\sqrt5}{2}\right\}$

b) $\begin{cases}4x^2+2xy+y^2=4y-1\\ 2x=y\left(\dfrac{1}{4x^2+1}-1\right)+2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+1+2xy+y^2-4y=0\\ 2x=\dfrac{y}{4x^2+1}-y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4x^2+1\right)+\left(2xy+y^2-2y\right)-2y=0\\ 2x+y-2=\dfrac{y}{4x^2+1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+\dfrac{2y}{4x^2+1}\left(2x+y-2\right)-2.\dfrac{y}{4x^2+1}=0\\ 2x+y-2=\dfrac{y}{4x^2+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\left(2x+y-2\right)^2-2\left(2x+y-2\right)=0\\ 2x+y-2=\dfrac{y}{4x^2+1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x+y-2-1\right)^2=0\\ 2x+y-2=\dfrac{y}{4x^2+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-3=0\\ \dfrac{y}{4x^2+1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+3\\ -2x+3=4x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+3\\ 2x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+3\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac12\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;y=5\\ x=\dfrac12;y=2\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-1;5\right);\left(\frac12;2\right)$

Bài 4: (4 điểm) a) Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$4abc\left[\frac{1}{(a+b)^2c}+\frac{1}{(b+c)^2a}+\frac{1}{(c+a)^2b}\right]+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}\ge 9$$

Áp dụng BĐT Cô –si cho hai số dương, ta có:

$$4abc\left[\frac{1}{(a+b)^2c}+\frac{1}{(b+c)^2a}+\frac{1}{(c+a)^2b}\right]+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}$$

$$=\frac{4ab}{(a+b)^2}+\frac{4bc}{(b+c)^2}+\frac{4ca}{(c+a)^2}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+2\right)$$

$$=\frac{4ab}{(a+b)^2}+\frac{4bc}{(b+c)^2}+\frac{4ca}{(c+a)^2}+\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}-6$$

$$=\left[\frac{4ab}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)^2}{4ab}\right]+\left[\frac{4bc}{(b+c)^2}+\frac{(b+c)^2}{4bc}\right]+\left[\frac{4ca}{(c+a)^2}+\frac{(c+a)^2}{4ca}\right]$$

$$+\frac{3(a+b)^2}{4ab}+\frac{3(b+c)^2}{4bc}+\frac{3(c+a)^2}{4ca}-6$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{4ab}{(a+b)^2}.\frac{(a+b)^2}{4ab}}+2\sqrt{\frac{4bc}{(b+c)^2}.\frac{(b+c)^2}{4bc}}+2\sqrt{\frac{4ca}{(c+a)^2}.\frac{(c+a)^2}{4ca}}$$

$$+\frac{3.4ab}{4ab}+\frac{3.4bc}{4bc}+\frac{3.4ca}{4ca}-6$$

$$=2+2+2+3+3+3-6=9$$

Vậy BĐT đã được chứng minh. Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c$

b)Tìm GTLN của: $A=\frac{433}{17}\sqrt{x-x^2}+143\sqrt{x+x^2}$ với $0<x<1$

Áp dụng BĐT Cô –si cho hai số dương, ta có :

$$A=\frac{433}{17}\sqrt{x-x^2}+143\sqrt{x+x^2}=\frac{433.12}{17}\sqrt{\frac{1}{144}x(1-x)}+\frac{143.12}{17}\sqrt{\frac{289}{144}x(1+x)}$$

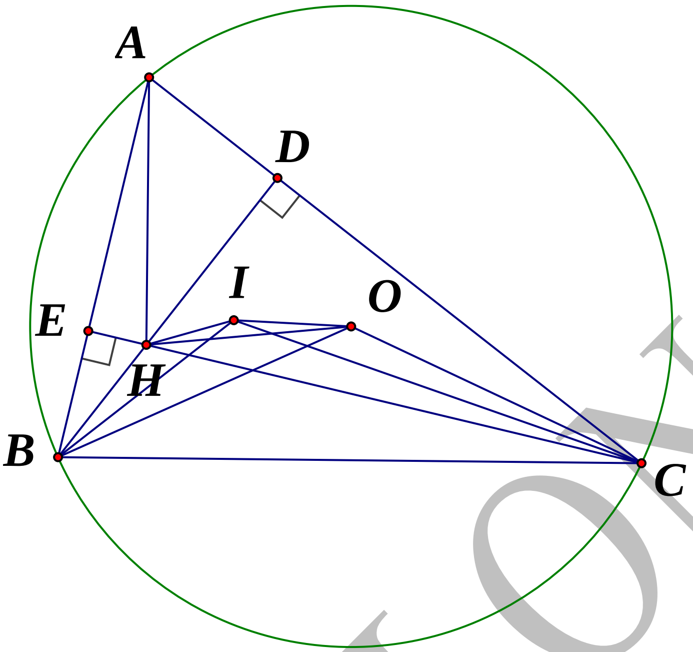
$$\le\frac{433.12}{17}.\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{144}x+1-x\right)+\frac{143.12}{17}.\frac{1}{2}.\left(\frac{289}{144}x+1+x\right)$$

$$=\frac{-433.12.143}{17.2.144}.x+\frac{433.12}{17.2}+\frac{143.12.433}{17.2.144}.x+\frac{143.12}{17.2}=\frac{3456}{17}\qquad\Leftrightarrow A\le\frac{3456}{17}$$

Dấu $"="$ xảy ra khi $\begin{cases}\frac{7}{144}x=1-x\\ \frac{289}{144}x=1+x\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{144}{145}$

Vậy GTLN của A là $\frac{3456}{17}$ khi $x=\frac{144}{145}$

Bài 5: (4 điểm) Cho ΔABC nhọn (AB < AC), có H, I, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp. Giả sử bốn điểm B, C, I, O cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng: $IH = IO$



Ta có: I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC (gt) nên BI, CI lần lượt là tia phân giác của $ABC; ACB$

Do đó: $IBC + ICB = \dfrac{ABC + ACB}{2} = \dfrac{180^0 - BAC}{2}$

$\Rightarrow BIC = 180^0 - \left(IBC + ICB\right) = 180^0 - \dfrac{180^0 - BAC}{2} = 90^0 + \dfrac{BAC}{2}$

Ta có: $BAC = \dfrac{BOC}{2}$ (gnt và góc ở tâm cùng chắn BC của (O)) $\Rightarrow BOC = 2BAC$

Ta có : $\begin{cases} BIC = BOC\left(\text{tứ giác BIOC nội tiếp}\right) \\ BIC = 90^0 + \dfrac{BAC}{2}\left(\text{cmt}\right) \\ BOC = 2BAC\left(\text{cmt}\right) \end{cases} \Rightarrow 2BAC = 90^0 + \dfrac{BAC}{2} \Rightarrow BAC = 60^0$

Gọi D là giao điểm của BH và AC. E là giao điểm của CH và AB.

Ta có : H là trực tâm của ΔABC $\Rightarrow \begin{cases} BD \perp AC \text{ tại D} \\ BH \perp AB \text{ tại E} \end{cases}$. Nên $ABD = 90^0 - BAC = 90^0 - 60^0 = 30^0$

Ta có: $\begin{cases} BHC = BEH + ABD = 120^0 \\ BOC = 2BAC = 120^0 \end{cases}$

$\Rightarrow BHC = BOC$ $\Rightarrow$ Tứ giác BHOC nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh với hai góc bằng nhau)

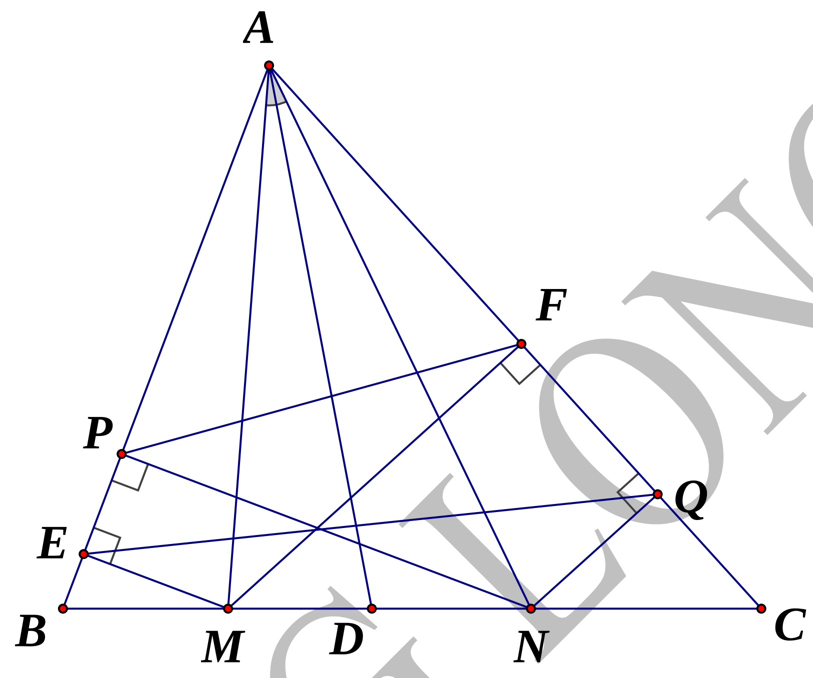
Vậy B, I, H, O, C cùng thuộc một đường tròn. Mà OB = OC (=R) $\Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O

$\Rightarrow OBC = OCB \Rightarrow OBC = \left(180^0 - BOC\right):2 = 30^0$

Ta có : $ABI = CBI \Rightarrow ABD + IBH = OBC + IBO \Rightarrow IBH = IBO$

Xét $(BIHOC)$, ta có: $IBH = IBO \Rightarrow IH = IO \Rightarrow IH = IO$

Bài 6: (4 điểm) Cho ΔABC có phân giác trong AD. Ở miền trong BAD và CAD lần lượt vẽ hai tia AM, AN sao cho $MAD = NAD$ (M thuộc đoạn BD, N thuộc đoạn CD). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M lên AB, AC; P, Q lần lượt là hình chiếu của N lên AB, AC.



a) Chứng minh rằng: 4 điểm E, F, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\begin{cases} MAD = NAD(gt) \\ BAD = CAD(\text{AD là tia phân giác của } BAC) \end{cases} \Rightarrow BAM + MAD = CAN + NAD$

$\Rightarrow BAM = CAN$

Xét ΔAEM và ΔAQN, ta có:

$\begin{cases} AEM = AQN\left(=90^0\right) \\ BAM = CAN(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta AEM \backsim \Delta QAN(g-g) \quad \Rightarrow \dfrac{AE}{AQ} = \dfrac{AM}{AN}(tsđd) \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} MAF + BAM = NAP + CAN(= BAC) \\ BAM = CAN(cmt) \end{cases} \Rightarrow MAF = NAP$

Xét ΔAFM và ΔAPN, ta có:

$\begin{cases} MAF = NAP(cmt) \\ AFM = APN\left(=90^0\right) \end{cases} \Rightarrow \Delta AFM \backsim \Delta APN(g-g) \Rightarrow \dfrac{AF}{AP} = \dfrac{AM}{AN}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{AE}{AQ} = \dfrac{AF}{AP} \Rightarrow \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AF}{AE}$

Xét ΔAPF và ΔAQE, ta có:

$$\begin{cases} PAF\left(\text{góc chung}\right) \\ \dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{AF}{AE}\left(\text{cmt}\right) \end{cases} \Rightarrow \Delta APF \backsim \Delta AQE\left(c-g-c\right) \;\Rightarrow APF = AQE \;\Rightarrow \text{ Tứ giác PFQE nội tiếp.}$$

Vậy bốn điểm E, F, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BM.BN}{CM.CN}$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{AM}{AN}=\dfrac{ME}{NQ}\left(\Delta AEM \backsim \Delta AQN\right) \\ \dfrac{AM}{AN}=\dfrac{MF}{NP}\left(\Delta AFM \backsim \Delta APN\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{ME}{NQ}=\dfrac{MF}{NP}\left(=\dfrac{AM}{AN}\right) \Rightarrow ME.NP = MF.NQ$

Do đó: $\dfrac{BM.BN}{CM.CN}=\dfrac{BM}{CM}.\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{S_{MAB}}{S_{MAC}}.\dfrac{S_{NAB}}{S_{NAC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB.ME}{\frac{1}{2}.AC.MF}.\dfrac{\frac{1}{2}.AB.NP}{\frac{1}{2}.AC.NQ}$

$=\dfrac{AB^2}{AC^2}.\dfrac{ME.NP}{MF.NQ}=\dfrac{AB^2}{AC^2}\left(\text{Vì } ME.NP = MF.NQ\right)$ **Vậy** $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BM.BN}{CM.CN}$

★ HẾT ★